Hochschule Zittau/Görlitz
Vorkurs Mathematik

Selbsttest

Lösen Sie die folgenden Aufgaben bitte ohne Taschenrechner. Falls Sie dabei Schwierigkeiten haben, so bieten wir einen Vorbereitungskurs Mathematik in Zittau bzw. in Görlitz an (siehe aktuelle Informationen der Hochschule Zittau/Görlitz).

1. Grundlagen, Bruchrechnen, Potenzen, Logarithmus

1) Vereinfachen Sie:

(a) $\frac{|a|}{a}$ (b) $\frac{63a^2b}{14ab^2}$ (c) $(x+3) : \left(\frac{x-3}{x^2-9}\right)$ (d) $\frac{\frac{2}{3}}{a+1} + \frac{1}{3a+3}$

2) Schreiben Sie ohne Klammern

(a) $(-a^4)^3$ (b) $(-a^3)^4$ (c) $-(a^3)^4$

3) Vereinfachen Sie:

(a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$ (b) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$ (c) $\frac{x}{\sqrt[4]{x^3}}$ (d) $\frac{\sqrt{4x^2-4}}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}}$

(e) $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$ (f) $\ln\left(\frac{2}{10}\right) + \ln(5)$ (g) $3\ln\left(e^2\right) + 2\ln\left(\frac{1}{e}\right)$

(Hinweis: $\ln(x)$ bezeichnet den natürlichen Logarithmus, e ist die Eulersche Zahl)

2. Gleichungen

4) Lösen Sie folgenden Gleichungen:

(a) $\frac{2x-1}{2x+5} = \frac{1}{3}$ (b) $\ln(x^2-8) = 0$ (c) $e^{2x} = 3$

5) Stellen Sie die Gleichungen nach den angegebenen Variablen um

(a) $y = 1 - e^{\lambda t}$ nach t (b) $K = R \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$ nach n

6) Die Gleichung $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$ besitzt die Lösung $x = 1$. Finden Sie die beiden weiteren Lösungen.

7) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

I. $2x + 3y = 8$

II. $3x - 6y = -30$

3. Funktionen

8) Für welche x-Werte aus dem Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$ gilt

(a) $\sin x = -1$ (b) $\cos x = 0$?

9) Vereinfachen Sie

(a) $\sqrt{4(\sin x)^2 + 4(\cos x)^2}$ (b) $\dfrac{\sin x}{\tan x}$ (c) $\dfrac{1}{2}(\cos x + \sin x + \cos(-x) + \sin(-x))$

10) Von einem rechtwinkligen Dreieck ist bekannt: Die Länge der Hypotenuse beträgt 2 und für einen der beiden spitzen Winkel gilt $\sin\alpha = \sqrt{2}/2$. Berechnen Sie die Längen der beiden Katheten sowie die beiden spitzen Winkel.

11) Für welche x-Werte sind die folgenden Funktionen definiert ?

(a) $\ln(4 - x^2)$ (b) $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$

12) Bestimmen Sie die Gleichungen der Geraden $y = mx + b$, sofern folgendes bekannt ist:

(a) Schnittpunkt mit der y-Achse $(0; 5)$, Anstieg $m = -3$

(b) die Punkte $(4; 0)$ und $(-2; 6)$ liegen auf der Geraden.

13) Berechnen Sie die Nullstellen sowie den Scheitelpunkt der quadratischen Funktion $y = x^2 - 2x - 3$.

14) Welche Symmetrie weisen die folgenden Funktionen auf?

(a) $\sin(x)$ (b) $\sin(x^2)$ (c) $(\sin(x))^2$

4. Differentialrechnung

15) Bestimmen Sie die Ableitung von

(a) $\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ (b) $\sin(x) \cdot \ln(x)$ (c) $\sin(\ln(x))$ (d) $\dfrac{\ln(x)}{x}$

16) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente von $y = \ln(x)$ an der Stelle $x = 1$ $(y = 0)$.

17) Bestimmen Sie die Monotonie der Funktion $y(t) = \dfrac{1}{1 + e^{-t}}$

18) Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen von $y = x \cdot e^x$ und bestimmen Sie alle lokalen Extremwerte und Wendepunkte der Funktion.

Lösungen

1) (a) $\begin{cases} 1, & a > 0, \\ -1, & a < 0 \\ \text{nicht definiert}, & a = 0. \end{cases}$ (b) $\dfrac{9a}{2b}$ (c) $(x+3)^2$ (d) $\dfrac{1}{a+1}$

2) (a) $-a^{12}$ (b) a^{12} (c) $-a^{12}$

3) (a) $\dfrac{-8}{3}$ (b) 2 (c) $\sqrt[4]{x}$ (d) 2 (e) -1 (f) 0 (g) 4

4) (a) $x = 2$ (b) $x = \pm 3$ (c) $x = \dfrac{1}{2}\ln(3)$

5) (a) $t = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-y)$ (b) $n = \dfrac{\ln\left(\frac{K}{R}(q-1)+1\right)}{\ln(q)}$

6) $x = -1$ und $x = -3$

7) $x = -2$ und $y = 4$

8) (a) $x = \dfrac{3\pi}{2}$ (b) $x = \dfrac{\pi}{2}$ und $x = \dfrac{3\pi}{2}$

9) (a) 2 (b) $\cos(x)$ (c) $\cos(x)$

10) Länge der beiden Katheten $\sqrt{2}$; Winkel jeweils $45°$

11) (a) $-2 < x < 2$ (b) $x \leq 1$ sowie $x > 2$

12) (a) $y = -3x + 5$ (b) $y = -x + 4$

13) Nullstellen bei $x = 3$ und $x = -1$, Scheitelpunkt in $(1; -4)$

14) (a) ungerade (b) gerade (c) gerade

15) (a) $-\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$ (b) $\cos(x) \cdot \ln(x) + \dfrac{\sin(x)}{x}$ (c) $\dfrac{\cos(\ln(x))}{x}$ (d) $\dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$

16) $y = x - 1$

17) Die Ableitung $y' = \dfrac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$ ist stets > 0 $\rightarrow$ $y(t)$ ist streng monoton wachsend

18) $y' = e^x(x+1)$, $y'' = e^x(x+2)$, $y''' = e^x(x+3)$
Lokales Minimum für $x = -1$ $(y = -e^{-1})$, Wendepunkt für $x = -2$ $(y = -2e^{-2})$